Denksport-Lösungen

Dekathlon 2009

Hier sind die Lösungen zu den Denksport-Aufgaben zusammengefasst. Es wird immer zuerst die Aufgabe beschrieben, dann die Lösung und zuletzt die Begründung für die Lösung.

Gruppe 1: Zu ergänzende Reihen **maximal erreichbare Punkte: 50**

1.1 (3)	1 – 8 – 27 – 64 – ? – etc. **Lösung: 125** Begründung: es handelt sich um die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge – 5 hoch 3 ergibt 125
1.2 (4)	1 – 2 – 6 – 24 – 120 – ? – etc. **Lösung: 720** Begründung: es handelt sich um die Fakultäten (oder Faktoriellen) der der natürlichen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge. Die Fortsetzung kann auch ermittelt werden, ohne sich dieses Umstands bewusst zu sein: jede Zahl entspricht dem Produkt aller vorhergehenden Zahlen, multipliziert mit der nächstfolgenden natürlichen Zahl, also 2 = 1 x 2, 6 = 2 x 3, 24 = 6 x 4, 120 = 24 x 5 … daher ist jetzt 120 mit 6 zu multiplizieren
1.3 (7)	2 – 3 – 5 – 7 – 11 – ? – ? – etc. **Lösung: 13, 17** Begründung: es handelt sich um die Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge
1.4 (9)	2 – 5 – 10 – 17 – 28 – ? – ? – etc **Lösung: 41, 58** Begründung: hier werden die Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge jeweils zur letzten Zahl der Reihe addiert – es hilft natürlich, wenn man vorher 1.3 richtig gelöst hat
1.5 (12)	P – ? – I – L – K – S – E – B – ? *(Achtung: kein „etc“. !!)* **Lösung: G, W** Begründung: Der Hinweis *Achtung: kein „etc“. !!* erleichtert den Schluss, dass die Reihe aus exakt 9 Elementen besteht. Wovon gibt es 9? Planeten nicht mehr, seit Pluto keiner mehr ist, die 9 Musen sind es auch nicht … 9 Bundesländer in Österreich? Ja, und zwar deren Landeshauptstädte (deren KFZ-Kennzeichen, bzw. deren Anfangsbuchstaben, wobei „Pölten“ ohne „Sankt“ zu nehmen ist). Die Sortierung erfolgt absteigend nach der Fläche des dazugehörigen Bundeslandes (die ist konstant, Einwohnerzahlen variieren). Da führt Niederösterreich vor der Steiermark und Tirol, das kleinste ist Wien.

1.6 (15)	T – S – U – S – I – S – L – S – *?* *(Tipp: wer's nicht gleich erkennt -> weiter zur nächsten Aufgabe, und später noch einmal versuchen, wenn Zeit bleibt)* **Lösung: D** Begründung: es handelt sich um die ersten Buchstaben der an Österreich grenzenden Länder, im Norden von Wien beginnend und im Uhrzeigersinn weiter laufend: **T**schechien, **S**lowakei, **U**ngarn, **S**lowenien, **I**talien, **S**chweiz, **L**iechtenstein, **S**chweiz (Schweiz zweimal, weil die Grenze durch Liechtenstein unterbrochen wird). Danach kommt **D**eutschland. Diese Frage ist nach Lösung der Aufgabe 3.3 wesentlich leichter zu beantworten als davor.

Gruppe 2: Berechenbares **maximal erreichbare Punkte: 110**

2.1 (3)	Ein Tischler hat eine quadratische Metallplatte auf ein Holzbrett zu nageln. Der Tischler schlägt die Nägel so ein, dass entlang jeder Seite der Metallplatte 25 Nägel zu sehen sind. Wie viele Nägel hat der Tischler einzuschlagen? **Lösung: 96** Begründung: der letzte Nagel an einer Seite ist gleichzeitig der erste Nagel der senkrecht anschließenden Seite, darf daher nur einmal gezählt werden - also entweder von den 25 x 4 = 100 noch 4 abziehen, oder nur 24 x 4 rechnen.
2.2 (8) *(a: 4)* *(b: 4)*	Eine Tennismeisterschaft wird auf knock-out Basis gespielt, d.h. wenn ein Spieler ein Match verliert, kann er nicht weiter in dem Turnier spielen. a) Wie viele Spieler haben an diesem Turnier teilgenommen, wenn insgesamt 27 Matches gespielt worden sind? b) Wie viele Spieler hatten in der ersten Runde ein Freilos (unter der Voraussetzung, dass jeder Spieler maximal ein Freilos erhält)? **Lösung: a) 28 b) 4** Begründung: Bei einem Turnier, das auf k.o.-Basis gespielt wird, muss bis auf den Sieger jeder in einem Match ausscheiden, d.h. man benötigt bei n Spielern immer n-1 Matches, um den Sieger zu ermitteln. Um dies möglichst effizient durchzuführen, wird normalerweise ein Raster aufgebaut, der von rechts beginnend 1 Finalspiel, 2 Semifinalspiele, 4 Viertelfinalspiele, 8 Achtelfinalspiele … etc. umfasst, sodass bei 2^n Spielern 2^n – 1 Matches anfallen. Der kleinste Wert für $2^n > 28$ ist 32, und bei einem 32er-Raster haben 4 Spieler in der ersten Runde ein Freilos (typischerweise die Gesetzten, also in dem Fall Nr. 1 bis 4)
2.3 (12) *(a: 6)*	Am 10.09.2009 lief **Hannes Lagler** beim Wien Energie Business Run auf der 4,2 km langen Strecke eine Zeit von 16:31,0 und gewann damit die WienIT-Wertung um 0,8 Sekunden vor Andreas Übertrager. Am 20.09.2009 lief der Äthiopier **Haile Gebrselassie** den Berlin-Marathon in 2:06:08 (kein neuer Weltrekord, aber zum Sieg reichte es locker – der zweite war schon fast 1 Minute zurück). a) Wer von den beiden lief mit der höheren Durchschnittsgeschwindigkeit?

(b: 6)	b) Konnte einer von beiden eine Durchschnittsgeschwindigkeit von mehr als 20 km/h erreichen? **Lösung: a) Haile Gebrselassie b) ja** Begründung: die Marathonstrecke umfasst etwas mehr als 42 km (exakt: 42,195 km). Um 42 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 km/h zu laufen, muss man daher 2,1 Stunden = 2 Stunden und 6 Minuten laufen. Das „etwas mehr" als 42 km (ca. 0,5%) reicht, dass auch mit 2:06:08 die 20 km/h erreicht wurden (8 Sekunden sind deutlich weniger als 0,5% von 2,1 Stunden). Auf einem Zehntel der Strecke müsste daher 0,21 Stunden gelaufen werden, um die gleiche Durchschnittsgeschwindigkeit zu erreichen, das wären knapp über 12 Minuten. Die Zeit von 16:31 entspricht bei einer Strecke von 4,2 km einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15,26 km/h.
2.4 (7)	Jetzt werden wir etwas schneller: Franz fährt mit seinem Auto von Graz nach Wien mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h. Auf dem Rückweg schneit es, sodass er nun nur mehr mit durchschnittlich 60 km/h unterwegs ist. Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit für Hin- und Rückweg? **Lösung: 80 km/h** Begründung: es ist für die Lösung egal, wie lang die Strecke zwischen Wien und Graz ist. Wir können einfach die Aufgabe auf eine Strecke von 120 km beziehen, für jede andere Strecke bleiben die Relationen gleich. Bei 120 km braucht Franz für den Hinweg 1 Stunde, für den Rückweg 2 Stunden, somit für 240 km 3 Stunden, somit 80 km pro Stunde.
2.5 (8)	Diesmal fahren Peter und Paul von Wien nach Linz – Peter mit dem Zug, Paul mit dem Auto. Sie fahren gleichzeitig weg. Peters Zug fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h. Paul muss unterwegs ein paar Besorgungen machen. Als er bei Melk die halbe Strecke hinter sich hat, beträgt seine Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/h. Wie schnell müsste Paul ab nun fahren, um gleichzeitig mit Peter in Linz anzukommen? **Lösung: unendlich schnell (er kann ihn nicht einholen)** Begründung: Wenn Paul mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h die halbe Strecke von Wien nach Linz zurückgelegt hat, dann ist Peter zu diesem Zeitpunkt bereits in Linz angekommen, wenn er mit der doppelten Durchschnittsgeschwindigkeit unterwegs war.
2.6 (16)	Ein Soldat wurde begraben. Seine Kameraden waren so wie er alte Rätselfreunde und schrieben auf seinen Grabstein: „Hier ruht unser Rätselkönig Christian Schuhrieder, der während des schrecklichen Weltkriegs in Treue zu unserem Kaiser Franz Joseph im Kampfe gefallen ist. 1798 … diese Zahl ist das Ergebnis, wenn Tag und Monat seines Todestages miteinander und mit dem Lebensalter, das er erreicht hat, multipliziert werden." Wann starb er (TT.MM.JJJJ), und wie alt ist er geworden? *(Lebensalter ist ganzzahlig!)* **Lösung: am 29.02.1916; 31 Jahre alt**

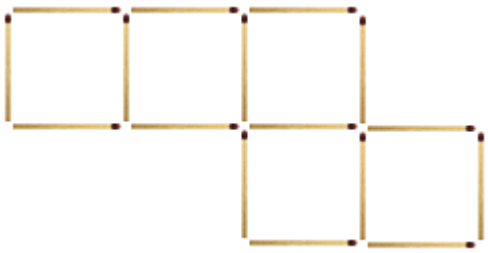
	Begründung: Die Primzahlzerlegung von 1798 ergibt: 2 x 29 x 31. Daher ist der Monat 2, der Tag 29 (weil der Februar nie 31 Tage hat) und das Alter 31. Der schreckliche Weltkrieg kann nur der erste gewesen sein (der damals noch nicht so hieß, den Zusatz „erster" bekam er erst nach dem zweiten) – der Hinweis auf Kaiser Franz Joseph macht's klar. Und das einzige Schaltjahr im ersten Weltkrieg war 1916. Weitere mögliche Lösungen wären zwar auch 31.1. und ein Alter von 58 oder 29.1. und ein Alter von 62 – aber dann wäre das Jahr nicht eindeutig bestimmbar und der Soldat ziemlich alt gewesen.
2.7 (22) *(a: 18)* *(b: 4)*	Ein Eichenwürfel mit einer Länge von 4 cm hat ein Gewicht von 55 Gramm. Es soll nun aus einem Fichtenholz, dessen spezifisches Gewicht nur halb so groß ist wie das des hier verwendeten Eichenholzes, ein größerer Würfel geschnitzt werden, der das gleiche wiegt. In beiden Fällen handelt es sich um Vollholz-Würfel ohne Hohlraum. a) Welche Kantenlänge wird dieser gleich schwere Fichtenwürfel haben (auf viertel cm genau)? b) Wie hoch ist in diesem Beispiel das spezifische Gewicht von Fichtenholz angesetzt (in g/cm^3, auf 2 Nachkommastellen genau)? *Anmerkung: das spezifische Gewicht der diversen Holzarten ist kein fixer Wert, sondern schwankt innerhalb gewisser Bandbreiten – daher der Zusatz „in diesem Beispiel"* **Lösung: a) 5 cm b) 0,43 g/cm^3** Begründung: Ein Eichenwürfel mit einer Länge von 4 cm hat ein Volumen 64 cm^3, wenn sein Gewicht 55 Gramm beträgt, hat er daher ein spezifisches Gewicht von 55 / 64 = 0,86 g/cm^3. Wenn das spezifische Gewicht des Würfels aus Fichtenholz nur halb so groß ist, dann ist dieses spezifisches Gewicht 0,43 g/cm^3 (= Lösung zu Frage b). Wenn der Fichtenwürfel das gleiche Gewicht haben soll wie der Eichenwürfel, aber Fichte das halbe spezifische Gewicht von Eiche hat, dann muss der Fichtenwürfel das doppelte Volumen des Eichenwürfels haben – also 128 cm^3. Die Frage ist daher: welche Zahl muss zur dritten Potenz erhoben werden, damit 128 als Ergebnis rauskommt? Wer die Aufgabe 1.1 richtig gelöst hat weiß, dass die dritte Potenz von 5 gleich 125 ist. D.h. die gesuchte Zahl ist sehr knapp über 5 (auf 2 Hundertstel genau: 5,04), daher ist die Kantenlänge des Fichtenwürfels auf viertel cm genau gleich 5.
2.8 (14)	Die Pumpstation eines Wasserturms ist ausgefallen. Um den Wasserbehälter wieder zu füllen, wurden 4 transportable Pumpen herbeigeschafft. - mit der stärksten kann der Behälter in 1 Stunde gefüllt werden - mit der zweitstärksten kann der Behälter in 2 Stunden gefüllt werden - mit der drittstärksten kann der Behälter in 3 Stunden gefüllt werden - mit der viertstärksten kann der Behälter in 6 Stunden gefüllt werden Wenn alle 4 Pumpen gleichzeitig angeworfen werden: wie lang dauert es dann, bis der Wasserbehälter voll ist? **Lösung: eine halbe Stunde (oder 30 Minuten)** Begründung: Es gibt verschiedene Lösungsansätze – relativ einfach ist folgender: schauen wir, was in 6 Stunden passiert. Die viertstärkste Pumpe würde den Behälter einmal voll füllen, die drittstärkste zweimal, die zweitstärkste dreimal und die stärkste sechsmal, d.h. in 6 Stunden würde der Behälter 12-mal voll werden. Um ihn einmal voll zu bekommen reicht daher ein Zwölftel von 6 Stunden, also eine halbe Stunde oder 30 Minuten.

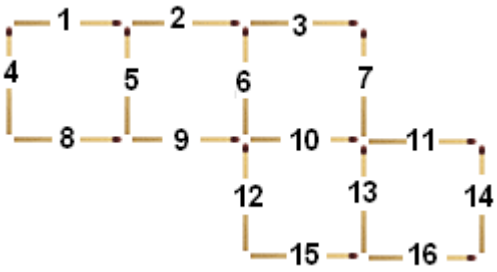
2.9 (20)	Ein Beduine besaß mehrere Kamele. Ein spanischer Zirkusdirektor wollte die Tiere kaufen und bot ihm eines Abends für jedes der Tiere so viele Euro, wie in der ganzen Herde Kamele waren. Der Beduine lehnte den Verkauf der Tiere zu diesem Preis ab. Daraufhin meinte der Spanier, es gäbe ja wohl noch andere Araber in der Gegend, die Kamele haben, und verabschiedete sich. Noch am selben Abend erzählte der Beduine seinen Nachbarn von dem Angebot und schlug ihm vor, ihre beiden gleich großen Kamelherden zu vereinigen. Als der Spanier am nächsten Tag dem Nachbarn den gleichen Deal vorschlug, willigte dieser ein – auf Basis der nun doppelt so großen Anzahl von Kamelen. Der Spanier gab dem Araber – bis auf einen Rest, den er in Münzen zahlte – lauter Zehn-Euro-Scheine. Bei der anschließenden Teilung des Geldes erhielten der Beduine und sein Partner zunächst jeder die gleiche Anzahl an Zehn-Euro-Scheinen. Einer dieser Scheine und die Münzen blieben schließlich übrig. Da keiner von beiden den verbliebenen Zehn-Euro-Schein wechseln konnte, hatten sie nun ein Problem mit dem Teilen. Nun schlug der Beduine seinem Partner vor, dieser möge den Zehn-Euro-Schein nehmen und ihm das Kleingeld und seinen schönen Dolch überlassen. Der Partner war einverstanden, und so erhielt der Beduine zusätzlich zu einem sehr guten Preis für seine Kamele auch noch einen wertvollen Dolch. Wie viel hat der Beduine für den Dolch bezahlt? **Lösung: 2 Euro** Begründung: Wenn für jedes Tier so viele Euro bezahlt werden wie in der Herde Kamele sind, dann muss der Kaufpreis eine Quadratzahl sein. Wenn zwei gleich große Herden vereinigt werden, muss es sich um eine gerade Anzahl von Tieren handeln, daher ist der Kaufpreis das Quadrat einer geraden Zahl. Wenn bei der Teilung des Geldes ein Zehn-Euro-Schein und ein paar Münzen übrig bleiben, kann die Endziffer dieser Quadratzahl nur 6 sein: die Quadrate der einstelligen geraden Zahlen sind 0, 4, 16, 36 und 64 – bei 0, 4 und 64 bleibt aber nicht ein Zehn-Euro-Schein plus etwas Kleingeld übrig, sondern nur bei 16 und 36. Jede mehrstellige Zahl lässt sich darstellen als 10a + b (wobei a die Zahl ist, die aus allen Ziffern links von der Einerstelle = b besteht); das Quadrat von 10a + b, also $(10a + b)^2$, ist $100 a^2 + 20ab + b^2$, und da $100 a^2 + 20ab$ sicher durch 20 teilbar ist (und daher die Zehn-Euro-Scheine für diesen Teil problemlos aufgeteilt werden können), bleibt das Teilungsproblem an der einstelligen Zahl hängen und besteht in dieser Form bei geraden Zahlen nur für solche, deren Quadrat die Endziffer 6 ergibt. D.h. auch ohne die Größe der Herde zu kennen wissen wir, dass jedenfalls 16 Euro zu teilen waren, jeder sollte daher 8 bekommen, aber der eine bekam 10, der andere 6 plus den Dolch. Somit hat ihn der Dolch 2 Euro gekostet. Für alle jene, welche „4 Euro“ als Lösung angegeben haben, wird angenommen, dass sie den richtigen Lösungsansatz hatten, aber dann die Differenz zwischen 10 und 6 Euro bereits als Kaufpreis betrachtet haben; für die Lösung „4 Euro“ werden daher 10 Punkte vergeben. Jeder andere Betrag wird mit 0 Punkten bewertet.

Gruppe 3: Bunt gemischt **maximal erreichbare Punkte: 40**

3.1 (5)

In der folgenden Figur sind 2 Streichhölzer so umzulegen, dass 4 Quadrate entstehen.

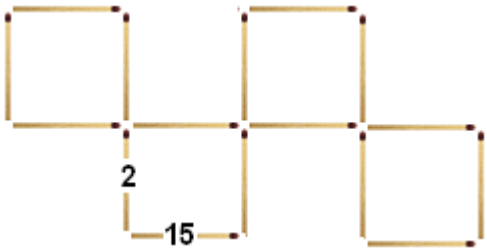




Links die Originalfigur, rechts die gleiche Anordnung mit einer Zuordnung von Nummern zu den einzelnen Streichhölzern. Welche beiden müssen woanders hingelegt werden?

Lösung: 2 und 15

Begründung: da 16 Streichhölzer verwendet werden, dürfen bei 4 Quadraten keine zwei dieselbe Kante haben, sie dürfen einander nur an den Ecken berühren; dies wird erreicht, indem Nr. 2 entfernt wird und senkrecht unterhalb von Nr. 5 gelegt wird, und dann noch Nr. 15 waagrecht um eine Stelle nach links verschoben wird.



3.2 (12)

In dem Diagramm unten verbirgt sich eine Flotte, bestehend aus Schiffen verschiedenen Typs: 2 Unterseeboote (●), 2 Zerstörer (●●), 2 Kreuzer (●●●) und ein Schlachtschiff (●●●●). Jedes Segment eines Schiffes belegt genau ein Feld des Diagramms. Schiffe sind im Diagramm entweder horizontal oder vertikal orientiert und berühren einander nicht, weder orthogonal noch diagonal.

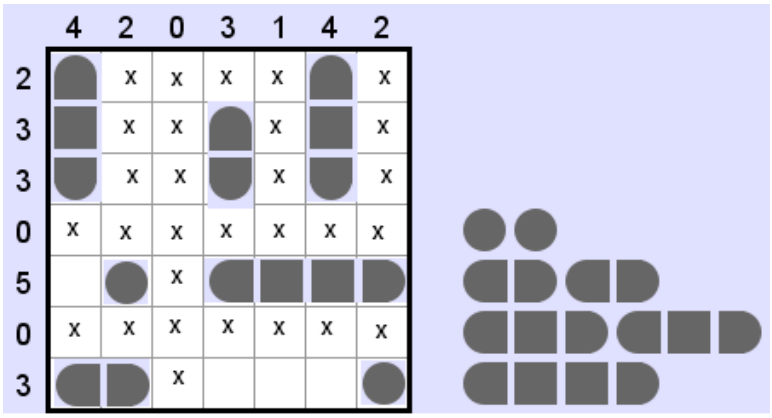
Die Zahlen am Rand des Diagramms geben an, wie viele Schiffssegmente sich in der jeweiligen Zeile bzw. Spalte des Diagramms befinden.

Die zu platzierenden Schiffe sind rechts neben dem Diagramm dargestellt. Die Positionen dieser Schiffe im Diagramm sind einzuzeichnen.

Tipp: Felder, auf denen sich keine Schiffssegmente befinden können, sollten mit einem Kreuz markiert werden – also zunächst alle, wo in der Zeile oder Spalte der Wert Null steht, und später alle rund um ein bereits positioniertes Schiff.

Lösung: siehe Abbildung

(nächste Seite)



Begründung: Als erstes werden die zwei Zeilen und die eine Spalte, wo die Nuller stehen, mit einem Kreuz markiert. Das Schlachtschiff mit den 4 Segmenten kann daher keinesfalls senkrecht liegen, und waagrecht auch nur in einer Zeile, die mindestens 4 Segmente zulässt. Das kann nur die Zeile mit der Zahl 5 sein, daher ist dort das Schlachtschiff in die rechten 4 Felder einzuzeichnen. Die Kreuzer mit den 3 Segmenten können nicht horizontal liegen, weil in Spalte 5 nur 1 Segment enthalten sein darf, und dieses ist bereits vom Schlachtschiff belegt. D.h. die beiden Kreuzer müssen vertikal liegen, und zwar in den Spalten, in denen 4 Segmente zugelassen sind. Sobald diese eingezeichnet sind, werden die Felder rundherum wieder mit Kreuzen als gesperrt markiert. Die oberste Zeile ist nun bereits voll belegt, und der eine Zerstörer mit den 2 Segmenten kann vertikal nur in Zeile 2 und 3 zu liegen kommen – und in Spalte 4, in der 3 Segmente zugelassen sind. Für den zweiten Zerstörer mit den 2 Segmenten bleiben nur mehr horizontal die ersten beiden Felder der letzten Reihe, und die beiden U-Boote sind dort zu platzieren, wo sowohl in der Zeile als auch in der Spalte noch je ein weiteres Segmente zugelassen ist.

3.3 (9)

Österreich hat 8 Nachbarländer. Wie viele Dreiländerecke befinden sich entlang der Österreichischen Grenze? Zusatzfrage (Lösung bringt bei dieser Aufgabe aber keine Punkte!): wie heißen sie, im Norden von Wien beginnend und im Uhrzeigersinn weiter laufend?

Lösung: 9

Begründung: da die Grenze zwischen Österreich und der Schweiz durch Liechtenstein unterbrochen wird, gibt es zwei Dreiländerecke Österreich-Schweiz- Liechtenstein – zusätzlich zu den 7 „normalen“ unter Auslassung von Liechtenstein, wie man sie in der obigen Darstellung abzählen kann.

3.4 (6)

Kann man auf Deutsch fünf aufeinanderfolgende Wochentage nennen, in denen kein "a" vorkommt? Wenn ja, wie?

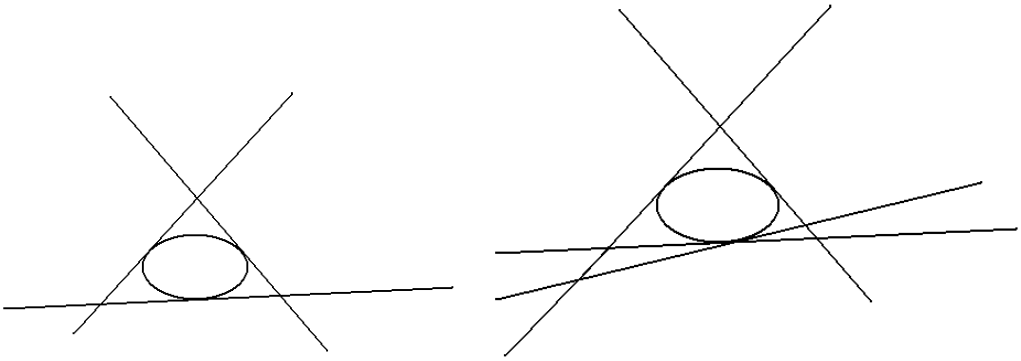
Lösung: vorgestern, gestern, heute, morgen, übermorgen

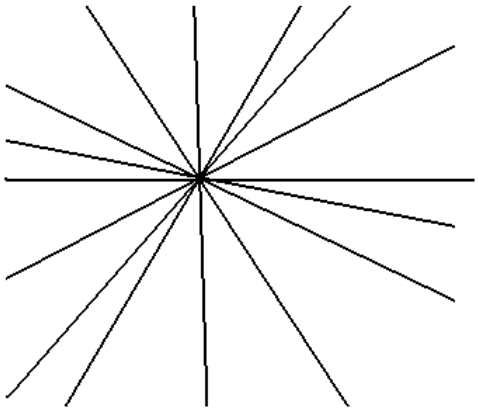
3.5 (8)

An eine Ellipse werden 17 Tangenten gelegt, von denen keine zwei identisch sind. Die Tangenten unterteilen die Ebene in etliche Flächen (zwischen der Ellipse und den Tangenten und zwischen den Tangenten untereinander), von denen manche begrenzt und manche unbegrenzt sind. In der folgenden Skizze mit 4 Tangenten sind alle begrenzten Flächen farbig gekennzeichnet. Wie viele unbegrenzte Flächen entstehen?

Lösung: 34

Begründung: am besten einsichtig ist es, wenn man sich eine Ellipse mit 3 Tangenten aufzeichnet, da entstehen 6 unbegrenzte Flächen. Mit jeder zusätzlichen Tangente entstehen 2 weitere unbegrenzte Flächen; allgemein daher doppelt so viele unbegrenzte Flächen wie Tangenten.



oben: 3 Tangenten - 6 unbegrenzte Flächen / 4 Tangenten - 8 unbegrenzte Flächen

Eine weitere Überlegung wäre folgende: aus dem Unendlichen betrachtet schrumpft die Ellipse zu einem Punkt, durch den alle Tangenten hindurchgehen, ebenso schrumpfen auch alle begrenzten Flächen rund um diese Ellipse zu einem Punkt; von diesem Punkt gehen die Tangenten in beide Richtungen strahlenförmig weg, es gibt daher genau doppelt so viele Strahlen wie Tangenten – und zwischen je zwei Strahlen liegt eine unbegrenzte Fläche.